Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

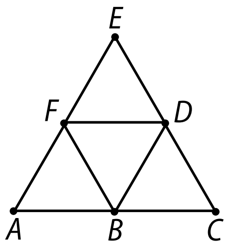
18.03.2023.
III разред

1. Прецртај слику на папир који ћеш предати. Упиши бројеве у празна поља квадрата тако да је збир бројева у свакој врсти, колони и на дијагоналама 348.

112	116	
119		

2. Нека је $a + b = 458$. У сваком примеру одреди вредност броја x (за колико се повећа или смањи сабирак):
а) $(a + x) + b = 558$;   б) $a + (b - x) = 400$;   в) $(a + x) + (b + x) = 528$.

3. а) Запиши све троуглове који су нацртани на слици.
б) Запиши све дужи које су нацртане на слици.



4. Колико пута се употреби цифра 7 у записивању свих бројева осме стотине?

5. Одреди најмању вредност збира четири двоцифрена броја
TA + TA + MA + TA
ако истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима различите цифре. Која је у том случају вредност збира T + A + M?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

III РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Сваки тачно уписан број **по 3 бода**. Ако су сви бројеви тачно уписани 20 бодова.

117	**118**	**113**
112	116	**120**
119	**114**	**115**

2. а) Како је збир увећан за 100 и први сабирак мора се увећати за 100, па је $x = 100$ [**6 бодова**];
б) Како је збир умањен за 58 и други сабирак мора се умањити за 58, па је $x = 58$ [**6 бодова**];
в) Како је збир увећан за 70, а сваки од сабирака је увећан за исти број, онда се сваки од њих мора увећати за $70 : 2 = 35$, па је $x = 35$ [**8 бодова**].

3. а) Троуглови: *ABF*, *BCD*, *FBD*, *FDE* и *ACE* [Сваки тачно записани троугао **по 2 бода** – укупно 10 бодова. Сваки нетачно записан троугао одузети по 1 бод. Укупан број бодова по овом делу задатка не може бити негативан.].
б) Дужи: *AB*, *BC*, *FD*, *CD*, *DE*, *BF*, *AF*, *FE*, *BD*, *AC*, *CE*, *AE* [**10 бодова** за свих 12 написаних дужи. За сваку дуж коју ученик изостави или погрешно напише (на пример, *AD*) одузети по 1 бод. Укупан број бодова по овом делу задатка не може бити негативан.].

4. (**МЛ 56-2**) Бројеви осме стотине су бројеви од 701 до 800. На месној вредности јединица цифра 7 се употреби 10 пута [**6 бодова**] (у бројевима 707, 717, ..., 797). На месној вредности десетица употреби се 10 пута [**6 бодова**] (у бројевима 770, 771, ..., 779). На месној вредности стотина употреби се 99 пута [**6 бодова**] (у бројевима 701, 702, ..., 799). Дакле, цифра 7 се употреби $10 + 10 + 99 = 119$ пута [**2 бода**].

5. Цифре десетица у сабирцима треба да буду најмање могуће, али различите од нуле. Како се T на месној вредности десетица појављује три пута, а M једанпут, збир ће бити најмањи ако је T = 1 [**5 бодова**] и M = 2 [**5 бодова**]. Цифра A треба да буде најмања од преосталих цифара, а то је A = 0 [**5 бодова**]. Најмања вредност збира је $10 + 10 + 20 + 10 = 50$ [**3 бода**], а у том случају је T + A + M = 3 [**2 бода**].

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

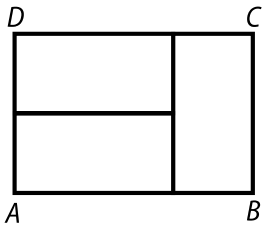
Окружно такмичење из математике ученика основних школа

18.03.2023.

IV разред

1. У пекари је једног дана продато 2300 переца по цени од 35 динара по комаду и 1750 кифли по цени од 48 динара по комаду. Шта је веће: укупна цена продатих переца или укупна цена продатих кифли тога дана?

2. Правоугаоник *ABCD* је састављен од три мања једнака правоугаоника (види слику). Ако је дужина краће странице сваког од три мала правоугаоника једнака 10 cm, одреди обим и површину правоугаоника *ABCD*.



3. У низу цифара

2 0 2 3 2 0 2 3 2 0 2 3 2 0 2 3 2 0 2 3 ...

цифре 2, 0, 2, 3 се узастопно записују. Која цифра је на 2023. месту тако добијеног низа?

4. Ана, Биља и Цеца су замислиле три броја. Ако се обрише прва цифра Аниног броја добија се Биљин број. Брисањем прве цифре Биљиног броја добија се Цецин број. Збир Аниног, Биљиног и Цециног броја је 912. Одреди збир цифара броја који је Ана замислила.
Напомена. Прва цифра броја је цифра највеће месне вредности у том броју.

5. Зграда има само приземље и два спрата. У тој згради 37 особа станује изнад приземља. Испод другог спрата станује њих 29. На првом спрату станује онолико њих колико станује укупно у приземљу и на другом спрату. Колико особа станује у приземљу, колико на првом спрату, а колико на другом спрату?

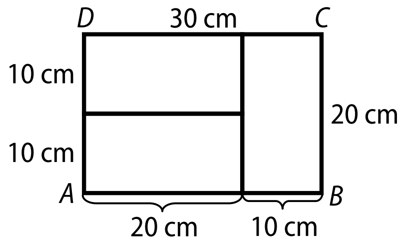
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

IV РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 56-3**) Укупна цена продатих переца је $2300 \cdot 35 = 80500$ динара [**9 бодова**]. Укупна цена продатих кифли је $1750 \cdot 48 = 84000$ динара [**9 бодова**]. Дакле, већа је укупна цена продатих кифли [**2 бода**].

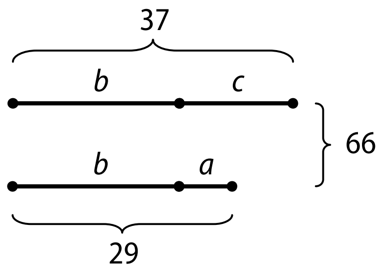
2. Дужа страница мањих правоугаоника је два пута дужа од краће странице, па је њена дужина 20 cm [**4 бода**]. Странице правоугаоника $ABCD$ су онда $a = AB = 20$ cm + 10 cm = 30 cm и $b = BC$ = 20 cm [**6 бодова** за тачно одређене обе странице]. Одавде је обим правоугаоника $O = 2a + 2b = 100$ cm [**5 бодова**], а површина $P = ab = 600$ cm^2 [**5 бодова**].



3. Видимо да се у овом низу цифара после сваке 4 записане цифре поново записују те исте цифре. Како је $2023 = 505 \cdot 4 + 3$, међу првих 2023 цифара цифре 2, 0, 2, 3 су поновљене 505 пута [**10 бодова**], а након тога су записане још три од четири дате цифре: 2, 0, 2. Дакле, на 2023. месту у овом низу налази се цифра 2 [**10 бодова**].

4. Да би збир ова три броја био троцифрен, Ана је морала да замисли троцифрени број, Биља двоцифрен и Цеца једноцифрен. Ако је Анин број $\overline{ABC}$, онда је Биљин број $\overline{BC}$, а Цецин C (A, B и C су цифре) и важи $\overline{ABC} + \overline{BC} + C = 912$ [**4 бода**]. Како се збир $C + C + C$ завршава цифром 2, то је могуће само ако је $C = 4$ [**5 бодова**]. Сада на месној вредности десетица збир $B + B + 1$ се завршава цифром 1, односно збир $B + B$ се завршава цифром 0. То је могуће само у случају $B = 5$ [**5 бодова**] (случај $B = 0$ не разматрамо јер онда BC не би био двоцифрени број). Коначно, заменом вредности за B и C добијамо да је $A = 8$ [**4 бода**]. Дакле, Ана је замислила број 854, а збир цифара њеног броја је $8 + 5 + 4 = 17$ [**2 бода**].

5. Означимо број особа које станују у приземљу са a, на првом спрату са b, а на другом спрату са c. Тада је $b + c = 37$ и $b + a = 29$ (види слику). Ако саберемо број особа које станују у приземљу и на првом спрату са бројем људи који станују на првом и другом спрату видимо да је то 66.



Овај број представља двоструки број људи који станује на првом спрату коме је додат укупан број особа које станују у приземљу и на другом спрату. Како је број особа које станују у приземљу и на другом спрату једнак броју особа које станују на првом спрату, то број 66 представља троструки број особа које станују на првом спрату, па је $b = 66 : 3 = 22$ [**10 бодова**]. Из $b + c = 37$ добијамо да је $c = 15$ [**5 бодова**], а из $b + a = 29$ да је $a = 7$ [**5 бодова**]. Дакле, у приземљу станује 7 особа, на првом спрату 22 особе, а на другом спрату 15 особа.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

18.03.2023.

V разред

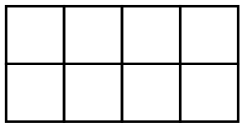
1. Елементи скупова A, B и C су, редом, слова речи СЕЛЕКЦИЈА, СЕКЦИЈА и ЛЕКЦИЈА. Одреди скупове A, B, C, $C \cup (A \setminus B)$, $C \cap (B \setminus A)$.

2. Збир углова α, β и γ једнак је 180°. Углови α и β су комплементни, а углови 5β и γ суплементни. Одреди мере углова α, β и γ.

3. Одреди збир свих разломака облика $\frac{a}{b}$ ($a \in N$, $b \in N$) ако је $a < b$ и производ имениоца и бројиоца тог разломка је једнак 30.

4. Књига је одштампана тако што је број стране штампан само на парним странама (2, 4, 6, 8, 10, ...). Последња нумерисана страна је имала одштампан број 234. Колико непарних цифара је укупно одштампано при нумерацији страна ове књиге?

5. Осам једнаких квадрата је спојено у један правоугаоник (види слику). Збир површина свих квадрата који се могу уочити на овој слици је 80 cm^2. Израчунај збир површина свих правоугаоника, који нису квадрати, а који се могу уочити на слици.



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

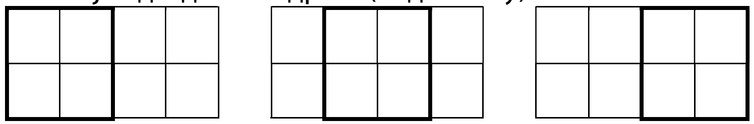
1. (**МЛ 57-2**) Скупови A, B и C су A = {С, Е, Л, К, Ц, И, Ј, А} [**2 бода**], B = {С, Е, К, Ц, И, Ј, А} [**2 бода**] и C = {Л, Е, К, Ц, И, Ј, А} [**2 бода**]. Како је $A \setminus B$ = {л} [**3 бода**], то је $C \cup (A \setminus B) = \{Л, Е, К, Ц, И, Ј, А\}$ [**4 бода**], а како је $B \setminus A = \varnothing$ [**3 бода**], то је и $C \cap (B \setminus A) = \varnothing$ [**4 бода**].

2. Како је збир $\alpha + \beta = 90°$ и збир $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, то је $\gamma = 90°$ [**6 бодова**]. Углови 5β и γ су суплементни, па је $5\beta + \gamma = 180°$, тј. $5\beta = 90°$. Дакле, $\beta = 18°$ [**8 бодова**] и $\alpha = 72°$ [**6 бодова**].

3. Пошто је $30 = 1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$, то су разломци који задовољавају услове задатка: $\frac{1}{30}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{10}$ и $\frac{5}{6}$ [сваки тачно записан разломак **по 3 бода**]. Њихов збир је $\frac{39}{30} = \frac{13}{10} = 1{,}3$ [**8 бодова** за било који облик разломка].

4. За нумерацију једноцифреним бројевима није употребљена ниједна непарна цифра. За нумерацију двоцифреним бројевима, непарна цифра може бити само на месној вредности десетица, па је одштампано 25 непарних цифара (по 5 код сваког двоцифреног броја који почиње цифрама 1, 3, 5, 7 или 9) [**6 бодова**]. Парних троцифрених бројева којима је цифра стотина 1 има 50 па је код њих цифра 1 штампана 50 пута, а такође поново на месној вредности десетица је одштампано 25 непарних цифара. Дакле, код бројева од 100 до 198 одштампано је укупно 75 непарних цифара [**6 бодова**]. Код троцифрених бројева који почињу цифром 2 непарна цифра може да буде само на месној вредности десетица, па је непарна цифра одштампана укупно 8 пута (210, 212, 214, 216, 218, 230, 232, 234) [**6 бодова**]. Коначно, укупно је одштампано 25 + 75 + 8 = 108 непарних цифара [**2 бода**].

5. На слици се може уочити осам датих квадрата и још три квадрата који се састоје од 4 дата квадрата (види слику).



Дакле, површина свих квадрата који се могу уочити једнака је површини 20 датих квадрата. Ако страницу сваког од осам датих квадрата означимо са a, тада је $20 \cdot a^2 = 80\ cm^2$, одакле је површина једног малог квадрата $4\ cm^2$, а његова страница 2 cm [**6 бодова**]. На слици имамо:

- 10 правоугаоника чије су странице дужине 2cm и 4cm и њихова укупна површина је $10 \cdot 2\ cm \cdot 4\ cm = 80\ cm^2$ [**4 бодова**];
- 4 правоугаоника страница дужине 2cm и 6cm и њихова укупна површина је $4 \cdot 2\ cm \cdot 6\ cm = 48\ cm^2$ [**3 бодова**];
- 2 правоугаоника страница дужине 2cm и 8cm и њихова укупна површина је $2 \cdot 2\ cm \cdot 8\ cm = 32\ cm^2$ [**2 бодова**];
- 2 правоугаоника страница дужине 4cm и 6cm и њихова укупна површина је $2 \cdot 4\ cm \cdot 6\ cm = 48\ cm^2$ [**2 бодова**];
- и 1 правоугаоник страница дужине 4 cm и 8 cm чија је површина је $4\ cm \cdot 8\ cm = 32\ cm^2$ [**2 бодова**].

Збир површина свих квадрата, који нису правоугаоници, који се могу уочити је $(80 + 48 + 32 + 48 + 32)\ cm^2 = 240\ cm^2$ [**1 бод**].

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

18.03.2023.

VI разред

1. Израчунај вредност израза
$$-(b-a)-(a+(-b))+4ab$$
ако је $a=-2{,}5$ и $b=5{,}5$.

2. Вредност израза $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ је 2023. Колико чинилаца има у овом изразу?

3. У фудбалу победник меча добија 3 бода, а поражени добија 0 бодова. Ако се меч заврши нерешено, тада оба тима добијају по 1 бод. Једна екипа је одиграла 68 утакмица и освојила 170 бодова. Колико највише утакмица је та екипа могла да изгуби?

4. Докажи да међу 26 различитих непарних природних бројева мањих од 100 постоје бар два чији је збир једнак 100.

5. Дат је квадрат $ABCD$. Нека је E тачка на полуправој AB таква да је $\measuredangle AED = 22^\circ\ 30'$. Ако се дужи AC и DE секу у тачки S, одреди меру угла BSE.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 57-2**) *I начин*. Сређивањем датог израза добијамо

$-(b-a)-(a+(-b))+4ab=-b+a-a+b+4ab=4ab$ [**15 бодова**],

одакле заменом вредности за a и b следи да је вредност датог израза једнака $4ab=4\cdot(-2{,}5)\cdot 5{,}5=-55$ [**5 бодова**].

II начин. Заменом вредности за a и b у датом изразу, добијамо

$-(5{,}5-(-2{,}5))-(-2{,}5+(-5{,}5))+4\cdot(-2{,}5)\cdot 5{,}5=-8+8-55=-55.$

[По **5 бодова** за тачно израчунате вредности$-(b-a)$; $(a+(-b))$ и $4ab$ и **5 бодова** за тачно израчунату вредност израза].

2. Како је

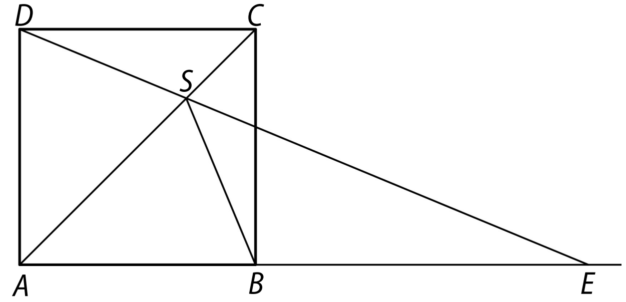
$$2023=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2},$$

то је $\frac{n+1}{2}=2023$ [**10 бодова**], па закључујемо да је $n+1=4046$, па је $n=4045$ [**5 бодова**], одакле следи да у датом изразу има 4044 чинилаца [**5 бодова**].

3. Означимо са x, y и z број утакмица које је ова екипа победила, играла нерешено и изгубила, редом. Тада важи да је $3x+y=170$ и $x+y+z=68$. Број изгубљених утакмица је највећи када збир $x+y$ има најмању вредност [**3 бода**]. Збир $x+y$ је најмањи ако је x највећи могући број, јер ако за 1 смањимо x потребно је y повећати за 3 [**2 бода**]. Како је $170=3\cdot 56+2$, то је $x=56$ [**5 бодова**] и $y=2$ [**5 бодова**], одакле следи да је највећи број утакмица које је дата екипа могла да изгуби једнак $68-(56+2)=10$ [**5 бодова**].

4. Непарних бројева мањих од 100 има укупно 50 и то су 1, 3, 5, ..., 97, 99. Уочимо двочлане скупове формиране од ових бројева, такве да је збир елемената сваког скупа једнак 100. То су скупови: {1, 99}, {3, 97}, ..., {47, 53}, {49, 51}. Ових скупова има 25 [**10 бодова**]. Ако желимо да изаберемо бројеве тако да међу њима нема два чији је збир 100, онда из сваког од ових скупова можемо одабрати највише 1 елемент, тј. можемо одабрати највише 25 таквих бројева. Било који број од преосталих ако изаберемо као 26. он ће са неким од већ изабраних бројева да даје збир 100 [**10 бодова**], што је и требало доказати.

5. Приметимо да је $\measuredangle EDA=90°-22°\,30'=67°\,30'$ [**2 бода**]. Даље је $\measuredangle DAS=\measuredangle DAC=45°$ [**2 бода**], јер је AC дијагонала квадрата $ABCD$. Због тога је у троуглу ADS угао $\measuredangle DSA=67°\,30'$ [**2 бода**]. Закључујемо да је троугао ADS једнакокрак и $AD=AS$ [**2 бода**], а како је $AD=AB$, то је $AS=AB$, па је и троугао ABS једнакокрак [**4 бода**]. Како је $\measuredangle BAS=45°$, у троуглу ABS је $\measuredangle ASB=\measuredangle ABS=67°\,30'$ [**4 бода**]. Дакле, тражени угао је $\measuredangle BSE=180°-2\cdot 67°\,30'=45°$ [**4 бода**].



Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

18.03.2023.

VII разред

1. Збир четири полинома P_1, P_2, P_3 и P_4 је $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 13$. Полином P_1 је степена 4, P_2 је степена 3, P_3 је степена 2 и P_4 је степена 1. Сви коефицијенти у полиному P_1 су једнаки, сви коефицијенти у полиному P_2 су једнаки и сви коефицијенти у полиному P_3 су једнаки. Одреди полином P_4.

2. Тежишне дужи које одговарају катетама правоуглог троугла имају дужине $\sqrt{52}$ cm и $\sqrt{73}$ cm. Одреди растојање између тежишта и центра описане кружнице тог троугла.

3. Дијагонале AC и BD паралелограма $ABCD$ секу се у тачки O. Тачка E је тежиште троугла ABD. На дужи OC дата је тачка G таква да је $OG : GC = 1 : 2$. Докажи да је четвороугао $EBGD$ паралелограм.

4. Одреди све просте бројеве p и q тако да важи $20p + 23q = 2023$.

5. На једној прослави 20% гостију су обукли плаве панталоне, при чему је 60% гостију са плавим панталонама носило беле ципеле. Међу гостима који нису обукли плаве панталоне 30% је носило беле ципеле. Израчунај колико процената гостију који носе беле ципеле је обукло плаве панталоне.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. *I начин*. Према услову задатка важи

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 13,$$

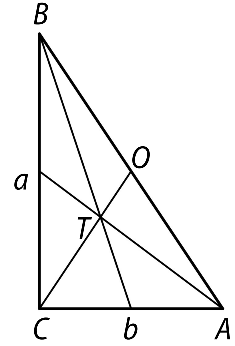
при чему је P_1 једини сабирак степена 4. То значи да су сви коефицијенти полинома P_1 једнаки 1, јер је 1 коефицијент у моному највишег степен збира полинома. Дакле, $P_1 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ [**4 бода**]. Одузимањем P_1 од збира добијамо да је $P_2 + P_3 + P_4 = -3x^3 + 3x^2 - 9x + 12$ [**4 бода**]. Аналогно добијамо да је $P_2 = -3x^3 - 3x^2 - 3x - 3$ [**3 бода**] и $P_3 + P_4 = 6x^2 - 6x + 15$ [**3 бода**], одакле је $P_3 = 6x^2 + 6x + 6$ [**3 бода**] и $P_4 = -12x + 9$ [**3 бода**].

II начин. Нека су коефицијенти полинома P_1 једнаки a, полинома P_2 једнаки b, полинома P_3 једнаки c и нека је $P_4 = dx + e$. Тада је
$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 =$
$= ax^4 + x^3(a + b) + x^2(a + b + c) + x(a + b + c + d) + (a + b + c + e)$ [**4 бода**], одакле закључујемо да је $a + b + c = 4$ [**2 бода**], $a + b + c + d = -8$ [**2 бода**], $a + b + c + e = 13$ [**2 бода**]. Сада је:

$d = (a + b + c + d) - (a + b + c) = -8 - 4 = -12$ [**5 бодова**] и

$e = (a + b + c + e) - (a + b + c) = 13 - 4 = 9$ [**5 бодова**],

одакле је $P_4 = -12x + 9$.

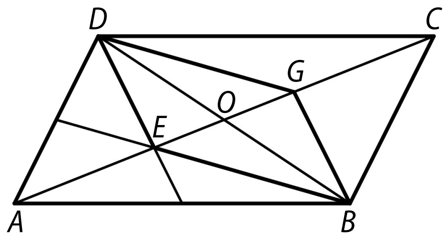


2. (**МЛ 56-3**) Нека је C теме правог угла, T тежиште и O центар описане кружнице тог троугла. O је уједно и средиште хипотенузе, означимо је са c, па су тачке C, T и O колинеарне [**3 бода**]. Како тежиште дели тежишну дуж у размери 2 : 1 и $CO = \frac{c}{2}$, то је $TO = \frac{1}{3}CO = \frac{c}{6}$ [**3 бода**]. Ако катете правоуглог троугла означимо са a и b ($a > b$), важи да је $73 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ [**3 бода**] и $52 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ [**3 бода**]. Сабирањем ове две једнакости добијамо $125 = \frac{5}{4}\left(a^2 + b^2\right)$, тј. $100 = c^2$, па је $c = 10$ cm [**6 бодова**]. Коначно, тражено растојање је $TO = \frac{5}{3}$ cm [**2 бода**].

3. Пошто је тачка O средиште дијагонале BD, која је и страница троугла ABD, важи да је AO тежишна дуж троугла ABD [**2 бода**]. Тачка E је тежиште троугла ABD, па је $AE : EO = 2 : 1$, тј. $EO = \frac{1}{3}AO$ [**3 бода**].

Из $OG : GC = 1 : 2$ следи да је $OG = \frac{1}{3}OC$ [**2 бода**]. Знамо да је АО = ОС.

Одатле је $OG = \frac{1}{3}OC = \frac{1}{3}AO$, па је $OG = EO$ [**3 бода**]. Доказ можемо завршити на више начина.



I начин. Доказали смо да је пресечна тачка O дијагонала EG и BD четвороугла $EBGD$ уједно и средиште сваке од њих, па се дијагонале четвороугла $EBGD$ полове међусобно [**6 бодова**]. Дакле, овај четвороугао је паралелограм [**4 бода**].

II начин. Такође важи $BO = OD$, као и $\measuredangle EOD = \measuredangle GOB$ (унакрсни углови). Одатле, на основу става СУС, троуглови EOD и GOB су подударни, па је $BG = ED$ [**3 бода**]. На исти начин доказујемо да су троуглови EBO и GDO подударни, па је $EB = GD$ [**3 бода**]. Дакле, наспрамне странице четвороугла $EBGD$ су једнаке, па је овај четвороугао паралелограм [**4 бода**].

III начин. Из доказане подударности троуглова EBO и GDO, закључујемо да је $\measuredangle EBO = \measuredangle GDO$ (или $\measuredangle BEO = \measuredangle DGO$), па су дужи BE и GD паралелне [**3 бода**]. На исти начин, из подударности троуглова EOD и GOB добијамо да су дужи BG и ED паралелне [**3 бода**]. Дакле, наспрамне странице четвороугла $EBGD$ су паралелне, па је овај четвороугао паралелограм [**4 бода**].

4. *I начин*. Последња цифра броја $20p$ је нула [**1 бод**]. Због тога се $23q$ завршава цифром 3, па се прост број q завршава цифром 1 [**3 бода**]. Како је $23q < 2023$, то је $q \leq 87$ [**4 бода**]. Дакле, q мора бити неки од бројева 11, 31, 41, 61 или 71 [**4 бода**]. Провером наведених бројева, долазимо да је једино могуће решење $q = 61$ и $p = 31$ [**8 бодова**]. [За свако погрешно наведено решење одузети по 3 бода.]

Напомена. Неки од наведених 5 случајева могу се елиминисати следећим разматрањем: из

$$20p + 23q = 20p + 20q + 3q = 2023 = 2020 + 3,$$
$$3q - 3 = 2020 - 20p - 20q,$$

следи $20 \mid 3(q-1)$, тј. $20 \mid q-1$, одакле је $q = 41$ или $q = 61$.

II начин. Полазна једначина је еквивалентна са $23q - 23 = 2000 - 20p$, односно $23(q-1) = 20(100-p)$ [**4 бода**]. Како је $23(q-1) > 0$, јер је q прост број, и НЗД(20,23) = 1, то је $100 - p$ природан број дељив са 23 [**4 бодова**]. Тада $100 - p$ може имати вредности 23, 46, 69 и 92, одакле је $p = 77$, $p = 54$, $p = 31$ или $p = 8$ [**4 бода**]. Једино решење за које је p прост број је $p = 31$. У том случају је $q = 61$ [**8 бодова**].

5. Нека је x број гостију на прослави. Према услову задатка $\frac{1}{5}x$ гостију је обукла плаве панталоне [**2 бода**], па $\frac{4}{5}x$ није обукло плаве панталоне [**2 бода**]. У групи гостију са плавим панталонама, њих $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}x = \frac{3}{25}x$ је носило беле ципеле [**4 бода**], док међу гостима који нису имали плаве панталоне било је $\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{5}x = \frac{6}{25}x$ оних који носе беле ципеле [**4 бода**]. Укупан број гостију који носе беле ципеле је $\frac{9}{25}x$ [**3 бода**], а међу њима удео оних гостију који су обукли плаве панталоне је $\left(\frac{3}{25}x\right):\left(\frac{9}{25}x\right) = \frac{1}{3}$, што је $33\frac{1}{3}\% = 33,\bar{3}\%$ [**5 бодова**].

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

18.03.2023.

VIII разред

1. Одреди реалан број m ($m \neq \frac{1}{2}$, $m \neq -2$) тако да график линеарне функције
$$(m+2)x + (1-2m)y + 2 = 0$$
на координатним осама одсеца одсечке једнаких дужина.

2. Основна ивица правилне тростране пирамиде је дужине x, а бочна страна заклапа са равни основе угао од $60°$. Одреди x, ако је мерни број површине пирамиде једнак мерном броју њене запремине.

3. На шаховском турниру је учествовало 15 играча. Сваки играч је одиграо по један меч са сваким од противника. За сваку победу су добили 3 бода, за нерешен резултат 1 бод, а за пораз 0 бодова. На крају турнира се испоставило да је било 30 нерешених мечева и да су два најбоље пласирана играча имала укупно петину свих освојених бодова. Да ли је могуће да су та два играча имала исти број бодова? Образложи одговор.

4. На колико начина се слова речи ТОПОЛОГ могу разместити тако да никада два иста слова нису једно поред другог?

5. Докажи да не постоји правоугли троугао чије су катете природни бројеви, а дужина хипотенузе $\sqrt{20222023}$ cm.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 56-3**) *I начин*. Одредимо тачку A у којој график дате линеарне функције пресеца x-осу. Из услова $y = 0$, добијамо да је $x=-\dfrac{2}{m+2}$, па је $A\left(-\dfrac{2}{m+2},0\right)$ [**4 бода**]. Тачку B у којој график дате линеарне функције пресеца y-осу одређујемо из услова $x = 0$. Тада је $y=-\dfrac{2}{1-2m}$, па је $B\left(0,-\dfrac{2}{1-2m}\right)$ [**4 бода**]. График дате линеарне функције одсеца на координатним осама одсечке једнаких дужина ако је $\left|-\dfrac{2}{m+2}\right|=\left|-\dfrac{2}{1-2m}\right|$, тј. $\left|\dfrac{m+2}{1-2m}\right|=1$ [**4 бода**].

Разликујемо два случаја:

1) Ако је $\dfrac{m+2}{1-2m}=1$, добијамо да је $m=-\dfrac{1}{3}$ [**4 бода**].

2) Ако је $\dfrac{m+2}{1-2m}=-1$, добијамо да је $m = 3$ [**4 бода**].

II начин. Једначину наведене линеарне функције можемо записати у облику $y=\dfrac{m+2}{2m-1}x+\dfrac{2}{2m-1}$ [**4 бода**]. Дакле, коефицијент правца је $k=\dfrac{m+2}{2m-1}$ [**4 бода**]. График дате линеарне функције одсеца на координатним осама одсечке једнаких дужина ако је $k = 1$ [**2 бода**] или $k = -1$ [**2 бода**]. Као у првом начину, долазимо до решења $m=-\dfrac{1}{3}$ [**4 бода**] или $m = 3$ [**4 бода**].

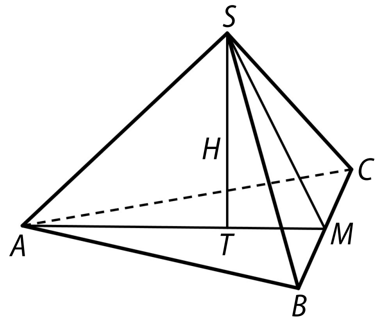
2. Угао између бочне стране и равни основе је угао између висине бочне стране и одговарајуће висине основе пирамиде, односно једнак је углу SMT, где је $ST = H$ висина пирамиде, а тачка T је тежиште основе пирамиде. Како је $\measuredangle MST = 30°$, то је $SM=2\cdot TM=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x}{2}\sqrt{3}=\dfrac{x}{3}\sqrt{3}$ [**4 бода**] и $H^2 = SM^2 - TM^2 = \dfrac{x^2}{4}$, па је $H=\dfrac{x}{2}$ [**4 бода**]. Површина пирамиде једнака је

$$P=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{x\sqrt{3}}{3}=\frac{3x^2\sqrt{3}}{4}\ [\textbf{5 бодова}],$$

док је запремина једнака

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{x^3\sqrt{3}}{24}\ [\textbf{5 бодова}].$$

Из услова једнакости мерних бројева површине и запремине добијамо да је $x = 18$ [**2 бода**].



3. На турниру је укупно одиграно $\dfrac{15\cdot 14}{2}=105$ мечева [**2 бода**]. У сваком мечу где имамо победника, укупан број бодова се повећа за 3 (победник освоји 3, а поражени 0 бодова) [**2 бода**]. У сваком мечу где имамо нерешен резултат, укупан број бодова се повећа за 2 (оба играча освоје по 1 бод) [**2 бода**]. Како је било 30 нерешених мечева, то је 105 − 30 = 75 мечева завршено победом неког играча. Дакле, укупан број освојених бодова на турниру је 75 · 3 + 30 · 2 = 285 [**6 бодова**]. Два најбоље пласирана играча су онда освојила укупно 57 бодова [**2 бода**]. Ако би они освојили исти број бодова, укупан број бодова који су та два играча освојила морао би да буде паран. Како је 57 непаран број, то није могуће да су два најбоље пласирана играча освојила исти број бодова [**6 бодова**].

4. *I начин*. У речи ТОПОЛОГ имамо три слова О која је потребно разместити међу преостала четири слова (Т, П, Л, Г) на неко од пет назначених места (___):

___*___*___*___*___

где * означава неко од слова Т, П, Л или Г без могућности понављања [**4 бода**]. Слова Т, П, Л и Г можемо распоредити на 24 начина (за одабир првог слова постоје 4 могућности, за одабир другог слова 3, трећег 2 и четвртог 1, укупно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$) [**6 бодова**]. Од назначених 5 места бирамо 3 за слова О што се може урадити на 10 начина (могуће позиције су: 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345) [**8 бодова**]. Закључујемо да се слова речи ТОПОЛОГ могу распоредити у траженом облику на $24 \cdot 10 = 240$ начина [**2 бода**].

II начин. У речи ТОПОЛОГ имамо три слова О, па преостала четири слова (Т,П,Л,Г) можемо сместити на неко од четири назначена места:

___ О ___ О___ О___ ,

при чему се на цртици може налазити и више слова. На првој и последњој цртици се не мора налазити ниједно слово, а на средње две се мора налазити бар по једно слово [**2 бода**]. Распореда код којих се на сваком месту налази тачно једно слово је $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ [**4 бода**] (за одабир првог слова постоје 4 могућности, за одабир другог слова 3, трећег 2 и четвртог 1). Уколико се два слова налазе на првом или четвртом месту, онда на другом и трећем морамо имати по тачно једно слово (опције су **О*О*О или О*О*О**), те у овом случају имамо $2 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 48$ распореда [**5 бодова**]. Уколико се на другом или трећем месту појављује више од једног слова, онда имамо следеће опције *О**О*О, О**О*О*, *О*О**О, О*О**О*, О**О**О, О***О*О, О*О***О. Таквих распореда је $7 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 168$ [**7 бодова**]. Дакле, укупно имамо $24 + 48 + 168 = 240$ начина за распоређивање слова речи ТОПОЛОГ при чему се два иста слова никада не налазе једно до другог [**2 бода**].

III начин. Различитих распореда слова речи ТОПОЛОГ има $\frac{7!}{3!} = 840$, јер имамо 7 слова од којих се слово О понавља три пута [**6 бодова**]. Укупан број распореда у којима се јавља ООО је $5! = 120$ (ООО посматрамо као једну групу, па заједно са 4 преостала слова распоређујемо 5 слова) [**5 бодова**]. Истим расуђивањем, број распореда слова речи ТОПОЛОГ у којима се јавља ОО, укључујући и распореде са ООО, једнак је $6! = 720$ [**5 бодова**]. Укупан број тражених распореда је онда $840 - 720 + 120 = 240$ [**4 бода**].

5. *I начин*. Ако би постојали природни бројеви a и b такви да су a, b, $\sqrt{20222023}$ странице правоуглог троугла, тј. да је $a^2 + b^2 = 20222023$, један од бројева a и b мора бити паран, а други непаран [**6 бодова**]. Нека је a паран, b непаран, па их запишимо као $a = 2k$, $k \in N$ и $b = 2p + 1$, $p \in N_0$. Тада је $a^2 + b^2 = 4k^2 + 4p^2 + 4p + 1$, па је $4k^2 + 4p^2 + 4p = 20222022$ [**6 бодова**]. Сада је лева страна дељива са 4, а десна није, јер двоцифрени завршетак (22) није дељив са 4, па тражени природни бројеви a и b не постоје [**8 бодова**].

II начин. Квадрат природног броја може да се завршава цифрама 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Како се збир $a^2 + b^2$ завршава цифром 3, онда сабирци морају да се завршавају цифрама 4 и 9 [**2 бода**]. Ако се a^2 завршава цифром 4, онда a мора бити облика $10p + 2$ или $10p - 2$, тј. $10p \pm 2$ ($p \in N_0$) [**2 бода**]. Слично, ако се b^2 завршава цифром 9, онда b мора бити облика $10q + 3$ или $10q - 3$, тј. $10q \pm 3$ ($q \in N_0$) [**2 бода**]. Тада је

$$(10p \pm 2)^2 + (10q \pm 3)^2 = 20222023$$

$$100p^2 \pm 40p + 4 + 100q^2 \pm 60q + 9 = 20222023$$

$$10 \cdot (10p^2 \pm 4p + 10q^2 \pm 6q) = 20222010$$

$$10p^2 \pm 4p + 10q^2 \pm 6q = 2022201$$ [**6 бодова**]

Како је вредност израза са леве стране паран број, а са десне непаран, то тражени природни бројеви a и b не постоје [**8 бодова**].